

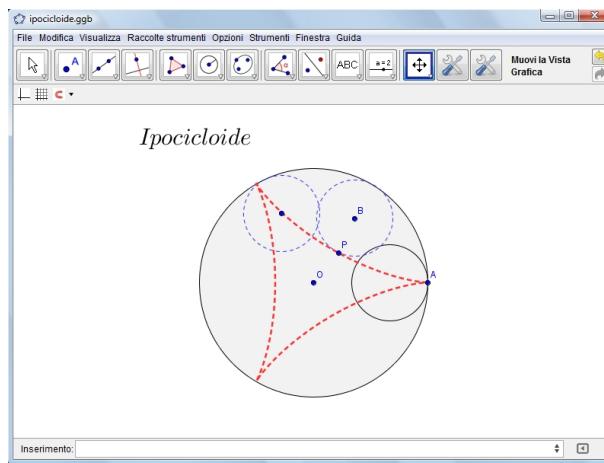
Scuola Superiore di Studi Avanzati

Prove di accesso

Compito A

1.1. Esercizio. Enunciare un teorema di geometria e un teorema di algebra.

1.2. Esercizio. Siano C_R e c_r due circonference di raggi $r < R$, con c_r tangente internamente a C_R nel punto A : facendo rotolare c_r all'interno di C_R il punto P di c_r inizialmente in A descrive una traiettoria che prende il nome di *ipocicloide*.



Si determini

- per quali scelte dei due raggi R ed r il punto P torna in A dopo esattamente un giro,
- per quali scelte dei due raggi R ed r il punto P torna in A dopo un numero finito di giri,
- per quali scelte di R e di r il punto P non torna mai in A .

1.3. Esercizio. Il candidato esamini la veritá o meno delle seguenti relazioni

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

Vero Falso

$$(2) \sin(\pi/4) + \tan(\pi/4) = 2$$

Vero Falso

- (3) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$
- | | |
|----------------|-----------------|
| Vero \square | Falso \square |
|----------------|-----------------|
- (4) esiste x_0 tale che $\sin^2(x_0) + \cos^4(x_0) < 0$
- | | |
|----------------|-----------------|
| Vero \square | Falso \square |
|----------------|-----------------|

1.4. Esercizio. Sia \mathcal{E} un'ellisse di fuochi F_1 ed F_2 e sia P un suo punto:

- indicare le relazioni che passano tra le rette F_1P , F_2P , la tangente e la normale a \mathcal{E} in P ,
- indicare le relazioni tra le lunghezze dei segmenti $\overline{F_1P}$, $\overline{F_2P}$, $\overline{F_1F_2}$ e quelle dei due assi dell'ellisse,
- determinare il minimo e il massimo dell'area del triangolo $\triangle_{F_1QF_2}$ al variare di $Q \in \mathcal{E}$.

1.5. Esercizio. Assegnato un numero $x \geq 1$ disporre in ordine crescente le quantità

$$x, x^2, \log_e(x), \log_{10}(x), x^x$$

giustificando i confronti effettuati.

Discutere successivamente anche il caso $0 < x < 1$.

Scuola Superiore di Studi Avanzati
Prove di accesso

Compito B

2.1. Esercizio.

- (1) In un triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore o uguale della lunghezza del terzo.

Vero Falso

- (2) Per ogni numero reale a riesce $a \geq a$

Vero Falso

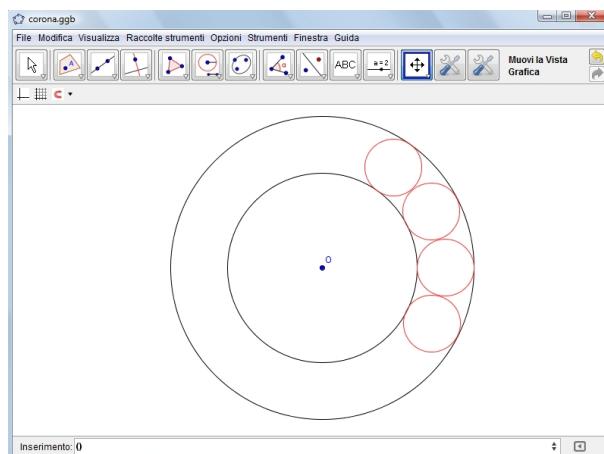
- (3) Due qualsiasi rette nel piano si intersecano in almeno un punto.

Vero Falso

- (4) Per la funzione seno riesce $-1 \leq \sin^2(\vartheta) \leq 1 \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Vero Falso

2.2. Esercizio. Siano C_R e c_r due circonferenze concentriche di raggi $r < R$,



- determinare una prima circonferenza C_1 tangente esternamente a c_r e internamente a C_R
- determinare, indicandone centro, una circonferenza C_2 tangente a c_r , a C_R e a C_1
- iterare il procedimento determinando le circonferenze C_{n+1} tangenti a c_r , a C_R e alla precedente C_n .

- esaminare per quali scelte di r e di R il procedimento indicato produce un numero finito di circonferenze diverse e per quali altre scelte il procedimento produce infinite circonferenze distinte.

2.3. Esercizio. La matematica insegna a dividere i numeri in categorie diverse: naturali, interi, razionali, irrazionali.

Il candidato esamini, fornendo esempi e contesempi, il tipo di risultati che le seguenti operazioni possono produrre operando su due numeri a e b naturali positivi:

$$(1) \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \sqrt[3]{a}$$

2.4. Esercizio. Consideriamo un biliardo circolare e supponiamo che la circonferenza-sponda garantisca alle biglie urti perfettamente elastici.

Lanciando una biglia da un punto A_0 della circonferenza secondo una direzione interna al cerchio si produce una traiettoria poligonale teoricamente infinita.

Detti A_1, A_2, \dots i punti della circonferenza-sponda urtati successivamente dalla biglia si esamini

- per quali direzioni la traiettoria si riduca a un unico triangolo o a un quadrato (percorso indefinitamente),
- per quali direzioni si riduca a un poligono regolare,
- per quali altre i punti A_n siano tutti diversi tra loro.

2.5. Esercizio. Assegnate due rette dello spazio tridimensionale illustrare i concetti di rette complanari, sghembe, ortogonali fornendo esempi e contesempi.

Definire il concetto di distanza tra due rette arbitrarie e indicare un algoritmo per determinarla.