

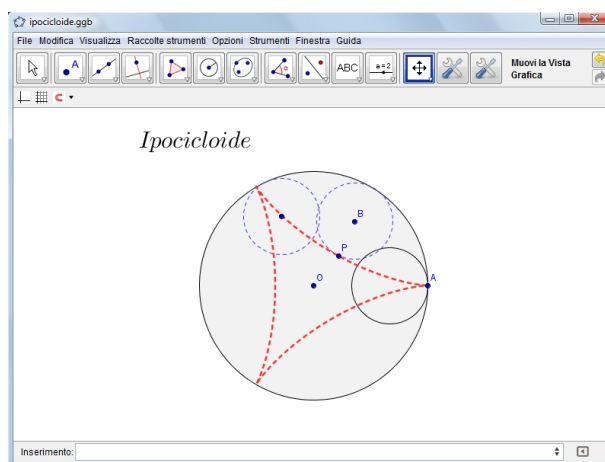
## Scuola Superiore di Studi Avanzati

Prove di accesso

### Compito A

**1.1. Esercizio.** Enunciare un teorema di geometria e un teorema di algebra.

**1.2. Esercizio.** Siano  $C_R$  e  $c_r$  due circonferenze di raggi  $r < R$ , con  $c_r$  tangente internamente a  $C_R$  nel punto  $A$ : facendo rotolare  $c_r$  all'interno di  $C_R$  il punto  $P$  di  $c_r$  inizialmente in  $A$  descrive una traiettoria che prende il nome di *ipocicloide*.



Si determini

- per quali scelte dei due raggi  $R$  ed  $r$  il punto  $P$  torna in  $A$  dopo esattamente un giro,
- per quali scelte dei due raggi  $R$  ed  $r$  il punto  $P$  torna in  $A$  dopo un numero finito di giri,
- per quali scelte di  $R$  e di  $r$  il punto  $P$  non torna mai in  $A$ .

**1.3. Esercizio.** Il candidato esamini la verità o meno delle seguenti relazioni

(1)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

Vero ☐

Falso ☐

(2)  $\sin(\pi/4) + \tan(\pi/4) = 2$

Vero ☐

Falso ☐

$$(3) \quad (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Vero ☐Falso ☐

$$(4) \quad \text{esiste } x_0 \text{ tale che } \sin^2(x_0) + \cos^4(x_0) < 0$$

Vero ☐Falso ☐

**1.4. Esercizio.** Sia  $\mathcal{E}$  un'ellisse di fuochi  $F_1$  ed  $F_2$  e sia  $P$  un suo punto:

- indicare le relazioni che passano tra le rette  $F_1P$ ,  $F_2P$ , la tangente e la normale a  $\mathcal{E}$  in  $P$ ,
- indicare le relazioni tra le lunghezze dei segmenti  $\overline{F_1P}$ ,  $\overline{F_2P}$ ,  $\overline{F_1F_2}$  e quelle dei due assi dell'ellisse,
- determinare il minimo e il massimo dell'area del triangolo  $\triangle_{F_1QF_2}$  al variare di  $Q \in \mathcal{E}$ .

**1.5. Esercizio.** Assegnato un numero  $x \geq 1$  disporre in ordine crescente le quantità

$$x, x^2, \log_e(x), \log_{10}(x), x^x$$

giustificando i confronti effettuati.

Discutere successivamente anche il caso  $0 < x < 1$ .

SAPIENZA  
2012 - 2013

## *Scuola Superiore di Studi Avanzati*

**Prove di accesso**

### **Compito B**

#### **2.1. Esercizio.**

- (1) In un triangolo la somma delle lunghezze di due lati é maggiore o uguale della lunghezza del terzo.

Vero ☐

Falso ☐

- (2) Per ogni numero reale  $a$  riesce  $a \geq a$

Vero ☐

Falso ☐

- (3) Due qualsiasi rette nel piano si intersecano in almeno un punto.

Vero ☐

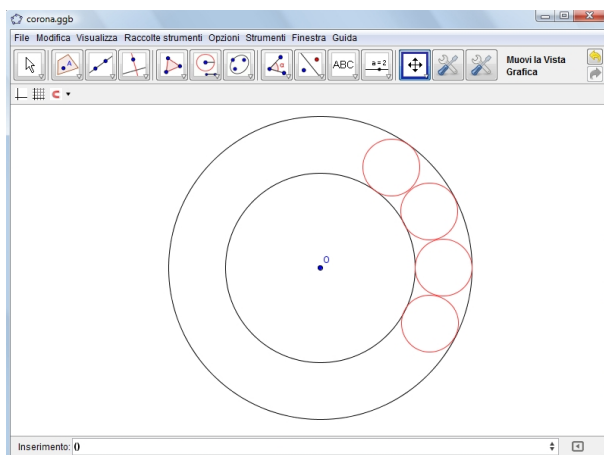
Falso ☐

- (4) Per la funzione seno riesce  $-1 \leq \sin^2(\vartheta) \leq 1 \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Vero ☐

Falso ☐

**2.2. Esercizio.** Siano  $C_R$  e  $c_r$  due circonferenze concentriche di raggi  $r < R$ ,



- determinare una prima circonferenza  $C_1$  tangente esternamente a  $c_r$  e internamente a  $C_R$
- determinare, indicandone centro, una circonferenza  $C_2$  tangente a  $c_r$ , a  $C_R$  e a  $C_1$
- iterare il procedimento determinando le circonferenze  $C_{n+1}$  tangenti a  $c_r$ , a  $C_R$  e alla precedente  $C_n$ .

- esaminare per quali scelte di  $r$  e di  $R$  il procedimento indicato produce un numero finito di circonferenze diverse e per quali altre scelte il procedimento produce infinite circonferenze distinte.

**2.3. Esercizio.** La matematica insegna a dividere i numeri in categorie diverse: naturali, interi, razionali, irrazionali.

Il candidato esamini, fornendo esempi e contresempi, il tipo di risultati che le seguenti operazioni possono produrre operando su due numeri  $a$  e  $b$  naturali positivi:

$$(1) \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \sqrt[b]{a}$$

**2.4. Esercizio.** Consideriamo un biliardo circolare e supponiamo che la circonferenza-sponda garantisca alle biglie urti perfettamente elastici.

Lanciando una biglia da un punto  $A_0$  della circonferenza secondo una direzione interna al cerchio si produce una traiettoria poligonale teoricamente infinita.

Detti  $A_1, A_2, \dots$  i punti della circonferenza-sponda urtati successivamente dalla biglia si esamini

- per quali direzioni la traiettoria si riduca a un unico triangolo o a un quadrato (percorso indefinitamente),
- per quali direzioni si riduca a un poligono regolare,
- per quali altre i punti  $A_n$  siano tutti diversi tra loro.

**2.5. Esercizio.** Assegnate due rette dello spazio tridimensionale illustrare i concetti di rette complanari, sghembe, ortogonali fornendo esempi e contresempi.

Definire il concetto di distanza tra due rette arbitrarie e indicare un algoritmo per determinarla.